EXERCÍCIOS – VETORES

1. (Uem 2017) Considere um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas de origem $O=(0,0)$. Um ponto neste sistema é representado na forma (x,y), sendo x sua abscissa e y sua ordenada. Neste sistema, considere os pontos $A=(3,4)$, $B=(6,4)$ e $C=(6,1)$.
Assinale o que for **correto**.

01) Os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm o mesmo módulo.

02) O vetor $\overrightarrow{AC}$ pode ser decomposto nos vetores, $\vec{u}$, paralelo ao eixo das abscissas, de comprimento 3 e com o mesmo sentido do eixo, e, $\vec{v}$, paralelo ao eixo das ordenadas, de comprimento 3 e com sentido oposto ao eixo.

04) Os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são ortogonais.

08) É possível determinar o módulo de um vetor conhecendo apenas os módulos de suas componentes ortogonais.

16) O vetor $\overrightarrow{BC}$ é paralelo ao eixo das abscissas.

2. (Uem 2016) Considere um sistema cartesiano ortogonal de origem $O=(0,0)$. Um ponto nesse sistema é representado na forma (x,y), sendo x a sua abscissa e y a sua ordenada.
Assinale o que for **correto**.

01) O vetor $\vec{v}$ representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, sendo $A=(0,1)$ e $B=(1,2)$, tem módulo $\sqrt{3}$.

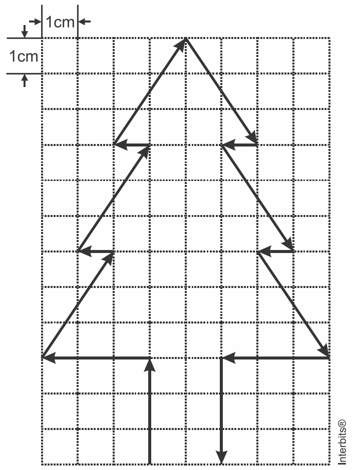
02) Considere os pontos $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,7)$ e $D=(8,10)$. Os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm a mesma direção.

04) Considere os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ representados, respectivamente, pelos segmentos orientados $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{BD}$, sendo $B=(1,1)$ e $D=(3,2)$. Logo, um representante do vetor soma $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ é o segmento orientado $\overrightarrow{OD}$.

08) A equação da reta que passa por $A=(1,2)$ e $B=(3,4)$ é dada por $y=x+1$.

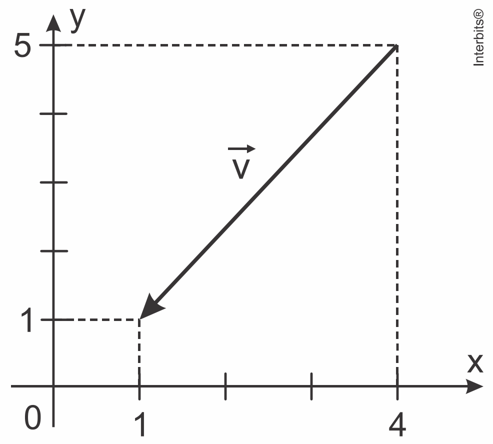
16) Considere os pontos $A=(1,1)$, $B=(2,2)$ e $C=(3,3)$. Os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CA}$ têm o mesmo sentido.

3. (Acafe 2015) Considere a árvore de natal de vetores, montada conforme a figura a seguir.



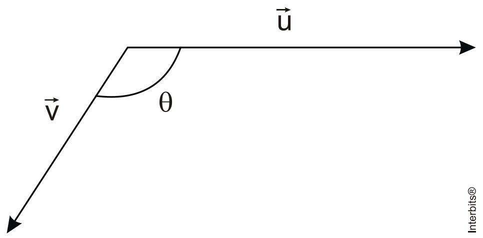
A alternativa **correta** que apresenta o módulo, em cm, do vetor resultante é:
a) 4 b) 0 c) 2 d) 6

4. (Upe 2015) A figura a seguir mostra o vetor $\vec{v}$ representado no plano cartesiano.



A representação e o módulo desse vetor são, respectivamente,
a) $\vec{v}=(5,1)$ e $|\vec{v}|=3$
b) $\vec{v}=(3,0)$ e $|\vec{v}|=3$
c) $\vec{v}=(-3,-4)$ e $|\vec{v}|=4$
d) $\vec{v}=(-3,-4)$ e $|\vec{v}|=5$
e) $\vec{v}=(-1,-4)$ e $|\vec{v}|=5$

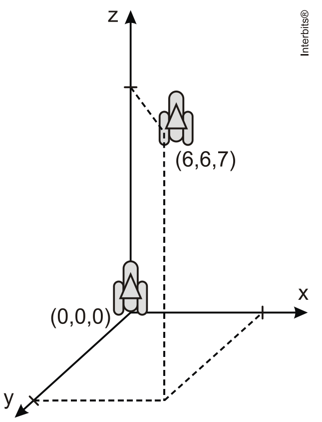
5. (Upe 2013 - MODIFICADA) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados na figura a seguir, têm módulos, respectivamente, iguais a 8 e 4, e o ângulo θ mede 120°.



Qual é o módulo do vetor $\vec{u}-\vec{v}$?
a) $3\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{7}$
d) $3\sqrt{5}$
e) $4\sqrt{5}$

6. (Ufpr 2011) Durante um passeio, uma pessoa fez o seguinte trajeto: partindo de um certo ponto, caminhou 3 km no sentido norte, em seguida 4 km para o oeste, depois 1 km no sentido norte novamente, e então caminhou 2 km no sentido oeste. Após esse percurso, a que distância a pessoa se encontra do ponto de onde iniciou o trajeto?

7. (Enem 2ª aplicação 2010) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.



Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição
a) (17, 3, 9).
b) (8, 3, 18).
c) (6, 18, 3).
d) (4, 9, - 4).
e) (3, 8, 18).

8. (Insper 2019) Existem cidades no mundo cujo traçado visto de cima assemelha-se a um tabuleiro de xadrez. Considere um ciclista trafegando por uma dessas cidades, percorrendo, inicialmente, $2{,}0\ km$ no sentido leste, seguindo por mais $3{,}0\ km$ no sentido norte. A seguir, ele passa a se movimentar no sentido leste, percorrendo, novamente, $1{,}0\ km$ e finalizando com mais $3{,}0\ km$ no sentido norte. Todo esse percurso é realizado em 18 minutos. A relação percentual entre o módulo da velocidade vetorial média desenvolvida pelo ciclista e a respectiva velocidade escalar média deve ter sido mais próxima de
a) 72%.
b) 74%.
c) 77%.
d) 76%.
e) 70%.

9. (Eear 2019) Dois vetores V_1 e V_2 formam entre si um ângulo θ e possuem módulos iguais a 5 unidades e 12 unidades, respectivamente. Se a resultante entre eles tem módulo igual a 13 unidades, podemos afirmar corretamente que o ângulo θ entre os vetores V_1 e V_2 vale:
a) $0°$
b) $45°$
c) $90°$
d) $180°$

10. (Eear 2018) A adição de dois vetores de mesma direção e mesmo sentido resulta num vetor cujo módulo vale 8. Quando estes vetores são colocados perpendicularmente, entre si, o módulo do vetor resultante vale $4\sqrt{2}$. Portanto, os valores dos módulos destes vetores são
a) 1 e 7.
b) 2 e 6.
c) 3 e 5.
d) 4 e 4.

11. (Uel 2018) Em uma brincadeira de caça ao tesouro, o mapa diz que para chegar ao local onde a arca de ouro está enterrada, deve-se, primeiramente, dar dez passos na direção norte, depois doze passos para a direção leste, em seguida, sete passos para o sul, e finalmente oito passos para oeste.

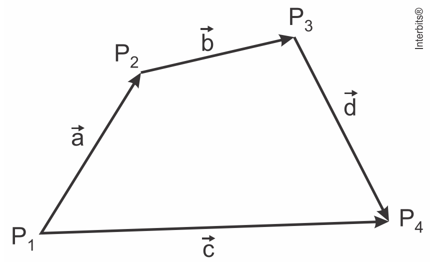
A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.
a) Desenhe a trajetória descrita no mapa, usando um diagrama de vetores.
b) Se um caçador de tesouro caminhasse em linha reta, desde o ponto de partida até o ponto de chegada, quantos passos ele daria?
Justifique sua resposta, apresentando os cálculos envolvidos na resolução deste item.

12. (Esc. Naval 2017) Dois navios da Marinha de Guerra, as Fragatas Independência e Rademaker, encontram-se próximos a um farol. A Fragata Independência segue em direção ao norte com velocidade $15\sqrt{2}\ nós$ e a Fragata Rademaker, em direção ao nordeste com velocidade de $20\ nós$. Considere que ambas as velocidades foram medidas em relação ao farol. Se na região há uma corrente marítima de $2{,}0\ nós$ no sentido norte-sul, qual o módulo da velocidade relativa da Fragata Independência, em nós, em relação à Fragata Rademaker?
a) 10,0 b) 12,3 c) 13,7 d) 15,8 e) 16,7

13. (Eear 2017) Sobre uma mesa sem atrito, um objeto sofre a ação de duas forças $F_1 = 9\,N$ e $F_2 = 15\,N$, que estão dispostas de modo a formar entre si um ângulo de $120°$. A intensidade da força resultante, em newtons, será de
a) $3\sqrt{24}$ b) $3\sqrt{19}$ c) $\sqrt{306}$ d) $\sqrt{24}$

14. (Unioeste 2017) Assinale a alternativa que apresenta CORRETAMENTE apenas grandezas cuja natureza física é vetorial.
a) Trabalho; deslocamento; frequência sonora; energia térmica.
b) Força eletromotriz; carga elétrica; intensidade luminosa; potência.
c) Temperatura; trabalho; campo elétrico; forca gravitacional.
d) Força elástica; momento linear; velocidade angular; deslocamento.
e) Calor específico; tempo; momento angular; força eletromotriz.

15. (Mackenzie 2016)



Uma partícula move-se do ponto P_1 ao P_4 em três deslocamentos vetoriais sucessivos $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{d}$. Então o vetor de deslocamento $\vec{d}$ é
a) $\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})$ b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ c) $(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$
d) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ e) $\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}$

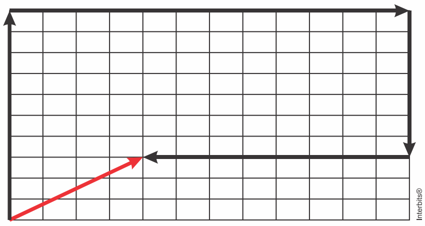
RESPOSTAS

1. 01 + 02 + 04 + 08 = 15. **2.** 02 + 04 + 08 = 14.

3. C **4.** D **5.** C **6.** $2\sqrt{13}\,\text{km}$.

7. B **8.** B **9.** C **10.** D

11. Trajetória descrita em quadrículas, cada uma contendo um passo de distância



a) Os vetores pretos representam os passos dados nas direções sugeridas, sendo o ponto de partida à esquerda do diagrama, sendo 10 passos no sentido norte, doze no sentido leste, sete para o sul e oito para oeste.

b) $R = 5$ passos.

12. D **13.** B **14.** D **15.** A

RESOLUÇÕES

1. 01 + 02 + 04 + 08 = 15.

[01] Verdadeira. De fato, pois sendo $\overrightarrow{AB} = (3, 0)$ e $\overrightarrow{CB} = (0, 3)$, temos $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| = 3$.

[02] Verdadeira. Com efeito, pois sendo $\overrightarrow{AC} = (3, -3)$, temos $\vec{u} = (3, 0) = 3\vec{i}$ e $\vec{v} = (0, -3) = -3\vec{j}$, com $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 3$.

[04] Verdadeira. De fato, pois $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. É imediato que se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$ são ortogonais, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ também são.

[08] Verdadeira. Seja $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ um vetor do plano. Logo, suas componentes ortogonais são os vetores $\vec{u} = a\vec{i}$ e $\vec{v} = b\vec{j}$. Em consequência, desde que $|\vec{u}| = |a|$ e $|\vec{v}| = |b|$, temos

$$|\vec{w}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}.$$

Portanto, é possível determinar o módulo de um vetor conhecendo apenas os módulos de suas componentes ortogonais

[16] Falsa. Sendo $\overrightarrow{BC} = (0, -3) = -3\vec{j}$, podemos afirmar que $\overrightarrow{BC}$ é perpendicular ao eixo das abscissas.

2. 02 + 04 + 08 = 14.

[01] Falso. Calculando:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

[02] Verdadeiro. Esboçando o gráfico percebe-se que os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm a mesma direção.

[04] Verdadeiro. Uma das maneiras de se obter a soma de vetores é ligando a origem do primeiro com a extremidade do segundo vetor (vetor $\overrightarrow{OD}$), quando estes são colocados em sequência (note-se que o fim do primeiro vetor também é a origem do segundo).

[08] Verdadeiro. Calculando:

$$y = ax + b$$
$$a = \frac{4-3}{2-1} = 1$$
$$A(1, 2) \rightarrow 2 = 1 + b \rightarrow b = 1$$
$$r : y = x + 1$$

[16] Falso. Esboçando o gráfico percebe-se que os vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CA}$ não têm o mesmo sentido.

3. C

A questão é puramente uma questão de vetores. Para resolvê-la, basta utilizar a regra do polígono, que diz que o vetor soma de n vetores consecutivos é dada pela união entre o início do primeiro vetor com o final do último.

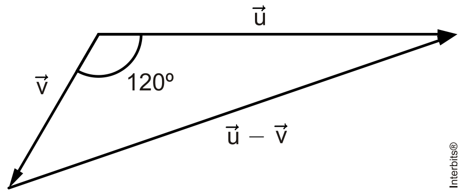
Assim, pela figura, o módulo do vetor soma é $2\,cm$.

4. D

Tem-se que $\vec{v} = (1, 1) - (4, 5) = (-3, -4)$. Portanto, segue

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

5. Gabarito Oficial: [B]
Gabarito da Questão Modificada: [C].
Considere a figura.



Pela Lei dos Cossenos, segue que

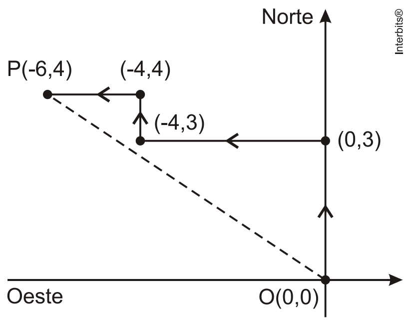
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 120°$$
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{112}$$
$$|\vec{u} - \vec{v}| = 4\sqrt{7}.$$

Observação: Caso o resultado pedido fosse $|\vec{u} + \vec{v}|$, a resposta seria a alternativa [B].

6. 1ª Solução

Adotando convenientemente como ponto de partida a origem do plano cartesiano, segue que a distância pedida é o módulo do vetor cuja extremidade é o ponto $P(-6, 4)$, ou seja,

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,\text{km}.$$



2ª Solução

Considerando arbitrariamente o ponto de partida como sendo a origem O do plano cartesiano, queremos calcular a distância entre O e $P = (-6, 4)$. Portanto,

$$d_{OP} = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,\text{km}.$$

3ª Solução

Supondo que o ponto onde a pessoa iniciou o trajeto seja a origem do plano de Argand-Gauss, segue que a distância pedida é o módulo do número complexo cujo afixo é o ponto $(-6, 4)$, isto é,

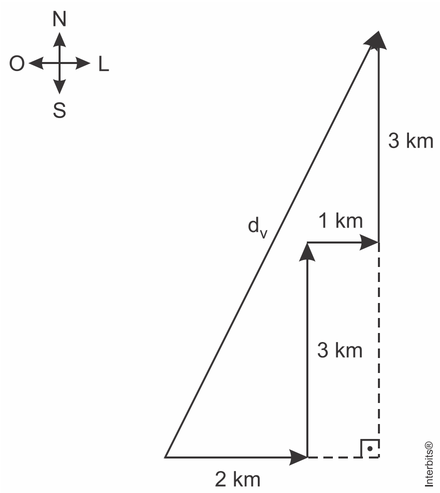
$$\sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,\text{km}.$$

7. B

Supondo que "para trás" signifique um deslocamento no sentido negativo, e "para frente" corresponda a um deslocamento no sentido positivo de cada eixo, segue que a posição atingida pelo foguete é dada por $(6 + 2, 6 - 3, 7 + 11) = (8, 3, 18)$.

8. B

Pelo enunciado, temos



Deslocamento vetorial:

$$d_v{}^2 = 3^2 + 6^2$$

$$d_v = 3\sqrt{5}\ km$$

Módulo da velocidade vetorial:

$$v_v = \frac{d_v}{\Delta t} = \frac{3\sqrt{5}}{18}$$

$$v_v = \frac{\sqrt{5}}{6}\ km/\text{min}$$

Deslocamento escalar:

$$d_e = 2 + 3 + 1 + 3$$

$$d_e = 9\ km$$

Velocidade escalar:

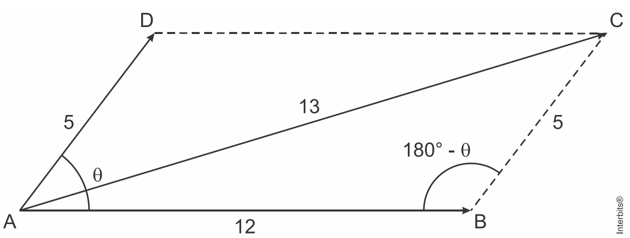
$$v_e = \frac{d_e}{\Delta t} = \frac{9}{18}$$

$$v_e = \frac{1}{2}\ km/\text{min}$$

Logo:

$$\frac{v_v}{v_e}\cdot 100\% = \frac{\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{2}{1}\cdot 100\% \cong 74\%$$

9. C



Aplicando a lei dos cossenos no ΔABC e sabendo que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta,$ temos:

$$13^2 = 5^2 + 12^2 - 2\cdot 5\cdot 12\cdot\cos(180° - \theta)$$

$$169 = 25 + 144 + 120\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\therefore \theta = 90°$$

10. D

Sendo v e w os módulos dos vetores, temos:

$$\begin{cases} v + w = 8 \\ \sqrt{v^2 + w^2} = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 8 - w \\ v^2 = 32 - w^2 \end{cases}$$

$$(8 - w)^2 = 32 - w^2 \Rightarrow 64 - 16w + w^2 = 32 - w^2 \Rightarrow$$

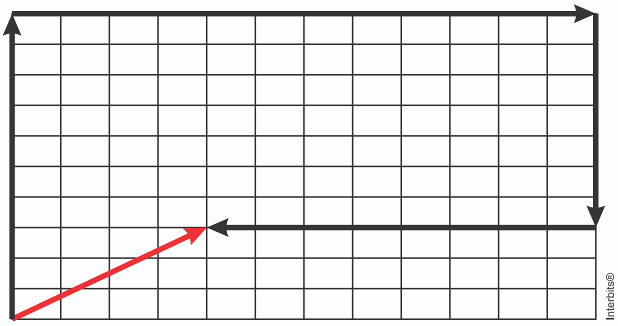
$$\Rightarrow 2w^2 - 16w + 32 = 0 \Rightarrow w^2 - 8w + 16 = 0$$

$$\therefore w = 4$$

$$v = 8 - 4$$

$$\therefore v = 4$$

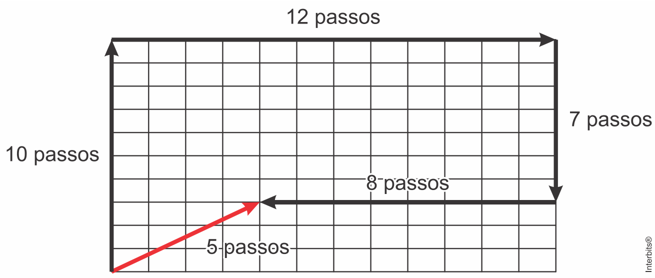
11. Trajetória descrita em quadrículas, cada uma contendo um passo de distância



a) Os vetores pretos representam os passos dados nas direções sugeridas, sendo o ponto de partida à esquerda do diagrama, sendo 10 passos no sentido norte, doze no sentido leste, sete para o sul e oito para oeste.

b) Em linha reta do ponto de partida até o ponto de chegada está representado no diagrama com a cor vermelha e representa a soma vetorial de todos os passos dados e representados em preto, ou seja, o vetor resultante. O seu cálculo é realizado usando o teorema de Pitágoras entre o início e o final do trajeto:

$R = \sqrt{4^2 + 3^2} \therefore R = 5\ passos.$



12. D

Velocidade da Fragata Independência (em nós):

$\vec{V}_I = (15\sqrt{2} - 2)\hat{y}$

Velocidade da Fragata Rademaker (em nós):

Em x: $20\cos 45°\hat{x} = 10\sqrt{2}\hat{x}$

Em y: $(20 sen 45° - 2)\hat{y} = (10\sqrt{2} - 2)\hat{y}$

Logo: $\vec{V}_R = 10\sqrt{2}\hat{x} + (10\sqrt{2} - 2)\hat{y}$

Velocidade relativa da Fragata Independência em relação à Fragata Rademaker (em nós):

$$\vec{V} = \vec{V}_I - \vec{V}_R$$

$$\vec{V} = (15\sqrt{2} - 2)\hat{y} - [10\sqrt{2}\hat{x} + (10\sqrt{2} - 2)\hat{y}]$$

$$\vec{V} = -10\sqrt{2}\hat{x} + 5\sqrt{2}\hat{y}$$

Portanto, o módulo desta velocidade é:

$$|\vec{V}| = \sqrt{(-10\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100\cdot 2 + 25\cdot 2} = \sqrt{250}$$

$$\therefore |\vec{V}| = 15{,}8\ nós$$

13. B
Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\theta$$
$$F_r^2 = 9^2 + 15^2 + 2 \cdot 9 \cdot 15 \cdot \cos 120$$
$$F_r^2 = 81 + 225 + 270 \cdot \cos 120$$
$$F_r^2 = 81 + 225 + 270 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$F_r = \sqrt{171} \Rightarrow F_r = \sqrt{9 \cdot 19} \Rightarrow F_r = 3\sqrt{19}\ N$$

14. D
São apenas grandezas vetoriais descritas nas alternativas, as correspondentes à opção [D]: força elástica, momento linear, velocidade angular e deslocamento. Algumas opções apresentadas, como trabalho, potência, temperatura e tempo, por serem escalares, são descartadas.

15. A
Aqui temos uma soma vetorial em que para determinarmos o vetor resultante, utilizamos a regra do polígono da seguinte forma:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$$

Logo, isolando o vetor $\vec{d}$ da equação, temos a resposta:

$$\vec{d} = \vec{c} - \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$